Programação Matemática – Teste II

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Ex. 1 — Mostre o dual do problema a seguir.

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.}: & x_1 - 3x_2 = 1 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Comentário:

$$\begin{aligned} \min\ & y_1 - y_2 + 6y_3 \\ \text{s.a.}: & y_1 - y_2 + 5y_3 \geq 4 \\ & -3y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 2 \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ex. 2 — Mostre um problema inviável cujo dual seja também inviável.
Comentário:

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 \\ \text{s.a.}: & x_1 \geq 2 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \geq 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Para registro, o dual é

$$\begin{aligned} \min\ & -2y_1 + y_2 - y_3 \\ \text{s.a.}: & -y_1 + y_2 \geq 1 \\ & -y_3 \geq 1 \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ex. 3 — Suponha que queiramos resolver o seguinte problema usando o método Simplex.

$$\begin{aligned}
\min\ & 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a.:}\ & 3x_1 + x_2 \geq 3 \\
& 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Para usar o método Simplex, transformamos as desigualdades em $\leq$,

$$\begin{aligned}
\min\ & 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a.:}\ & -3x_1 - x_2 \leq -3 \\
& -4x_1 - 3x_2 \leq -6 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

e adicionamos variáveis de folga.

$$\begin{aligned}
\min\ & 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a.:}\ & -3x_1 - x_2 + s_1 \leq -3 \\
& -4x_1 - 3x_2 + s_2 \leq -6 \\
& x_1 + 2x_2 + s_3 \leq 3 \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

A seguir temos o *tableau* Simplex inicial.

$$\left(\begin{array}{ccccc:c}
-3 & -1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\
-4 & -3 & 0 & 1 & 0 & -6 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
\hdashline
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Observe que os coeficientes reduzidos de custo são todos positivos (e como o problema é de minimização, a solução é ótima). A solução é, no entanto, inviável, com $s_1 = -3$, $s_2 = -6$ e $s_3 = 3$. Mostre como usar um passo do algoritmo dual-Simplex neste tableau, mostrando o tableau seguinte.

Comentário:

$$\left(\begin{array}{ccccc:c}
-5/3 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & -1 \\
4/3 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 2 \\
-5/3 & 0 & 0 & 2/3 & 1 & -1 \\
\hdashline
2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & -2
\end{array}\right)$$