

Programação Matemática – Teste II

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Ex. 1 — Mostre o dual do problema a seguir.

$$\begin{aligned} \min & x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a. :} & x_1 + x_2 = 4 \\ & 8x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Comentário:

$$\begin{aligned} \min & 4y_1 - 4y_2 + 6y_3 \\ \text{s.a. :} & y_1 - y_2 + 8y_3 \geq 1 \\ & -y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 5 \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ex. 2 — Considere o problema $\max \mathbf{d}^T \mathbf{x}$, sujeito a $A\mathbf{x} \geq -\mathbf{d}$, com $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ (note que os vetores de coeficientes do objetivo e das constantes são iguais). Suponha que a matriz A seja antissimétrica, ou seja, $A = -A^T$. Mostre o dual deste problema.

Comentário: O dual é igual ao primal.

Ex. 3 — Suponha que queiramos resolver o seguinte problema usando o método Simplex.

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a. :} & 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Para usar o método Simplex, transformamos as desigualdades em \leq ,

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} & -3x_1 - x_2 \leq -3 \\ & -4x_1 - 3x_2 \leq -6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

e adicionamos variáveis de folga.

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} & -3x_1 - x_2 + s_1 \leq -3 \\ & -4x_1 - 3x_2 + s_2 \leq -6 \\ & x_1 + 2x_2 + s_3 \leq 3 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

A seguir temos o *tableau* Simplex inicial.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ -4 & -3 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Observe que os coeficientes reduzidos de custo são todos positivos (e como o problema é de minimização, a solução é ótima). A solução é, no entanto, inviável, com $s_1 = -3$, $s_2 = -6$ e $s_3 = 3$. Mostre como usar um passo do algoritmo dual-Simplex neste *tableau*, mostrando o *tableau* seguinte.

Comentário:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5/3 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & -1 \\ 4/3 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 2 \\ -5/3 & 0 & 0 & 2/3 & 1 & -1 \\ \hline 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & -2 \end{array} \right)$$