Programação Matemática – Teste III

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Ex. 1 — Queremos levar itens de quatro fontes para dois destinos. Os custos são dados na tabela a seguir.

22	12
35	20
10	15
40	20

As fontes tem as seguintes quantidades de itens:

$$
\begin{aligned}
a_1 &: 15\\
a_2 &: 7\\
a_3 &: 10\\
a_4 &: 8
\end{aligned}
$$

Os destinos tem as seguintes demandas:

$$
\begin{aligned}
b_1 &: 15\\
b_2 &: 25
\end{aligned}
$$

Modele este problema como programação linear, mas com a seguinte restrição adicional: os caminhos (dutos, ou canais) $a_1 \to b_2$ e $a_2 \to b_2$ devem *necessariamente* ser usados. Se não conseguir, modele sem a restrição adicional (valendo menos).

Comentário: Dois métodos:

(i) Se os dois canais devem necessariamente ser usados, retiramos 1 das ofertas de a_1 e a_2 e 2 da demanda de b_2, e resolvemos o problema. O programa linear é

$$
\begin{aligned}
\min\ & 22x_{11} + 12x_{12} + 35x_{21} + 20x_{22} + 10x_{31} + 15x_{32} + 40x_{41} + 20x_{42}\\
\text{s.a.}:\ & x_{11} + x_{12} = 14\\
& x_{21} + x_{22} = 6\\
& x_{31} + x_{32} = 10\\
& x_{41} + x_{42} = 8\\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 15\\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 23\\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

(ii) Incluir restrições no programa linear, $x_{12} \geq 1$, $x_{22} \geq 1$. O programa linear é

$$\begin{aligned}
\min\ & 22x_{11} + 12x_{12} + 35x_{21} + 20x_{22} + 10x_{31} + 15x_{32} + 40x_{41} + 20x_{42} \\
\text{s.a.}: & x_{11} + x_{12} = 15 \\
& x_{21} + x_{22} = 7 \\
& x_{31} + x_{32} = 10 \\
& x_{41} + x_{42} = 8 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 15 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 25 \\
& x_{12} \geq 1 \\
& x_{22} \geq 1 \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Ex. 2 — Descrevemos agora um jogo de soma zero com dois jogadores, A e B. A tem tres estratégias possíveis e B tem quatro. Do ponto de vista de A, a matriz de pagamentos C é

	b_1	b_2	b_3
a_1	5	6	−4
a_2	−2	−1	0

Diga se A e B conseguem uma estratégia fixa ótima, ou se precisam de estratégia mista para obter um valor esperado ótimo.
Mostre também como modelar este problema como programa linear.
Comentário: O valor maximin é −2, e o minimax é zero, portanto os dois jogadores devem usar estratégia mista para obter resultado melhor do que com estratégia fixa.
O programa linear é mostrado a seguir.

$$\begin{aligned}
\max\ & v \\
\text{s.a.}: & 5x_1 - 2x_2 \geq v \\
& 6x_1 - x_2 \geq v \\
& -4x_1 \geq v \\
& x_1 + x_2 = 1 \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$