Programação Matemática – Teste I

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Faça o item (1). Faça também um dentre (2) e (3), à sua escolha.

Ex. 1 — Um silvicultor precisa decidir a quantidade que irá comprar de cada um dentre dois tipos de fertilizante. Cada fertilizante contém diferentes quantidades de quatro nutrientes necessários para suas árvores. Ele quer minimizar o quanto pagará nos fertilizantes, sem comprometer o desenvolvimento das árvores.

A próxima tabela mostra a necessidade de cada nutriente para cada árvore.

nutriente	mínimo (cg)
I	70
II	38
III	2
IV	18

A próxima tabela mostra quanto cada fertilizante (há dois, A e B) oferece de cada nutriente, e o preço de ambos por quilograma.

	em kg de A (cg)	em kg de B (cg)
I	6	9
II	5	4
III	0.5	0
IV	3	1
custo/kg	18	29

Modele como problema de programação linear, por árvore (a proporção A/B para mais árvores é a mesma, portanto podemos calcular para uma árvore apenas).

Comentário:

$$
\begin{aligned}
\text{min}\ & 18a + 29b \\
\text{s.a.:}\ & 6a + 9b \geq 70 \\
& 5a + 4b \geq 38 \\
& 0.5a \geq 2 \\
& 3a + b \geq 18 \\
& a, b \geq 0.
\end{aligned}
$$

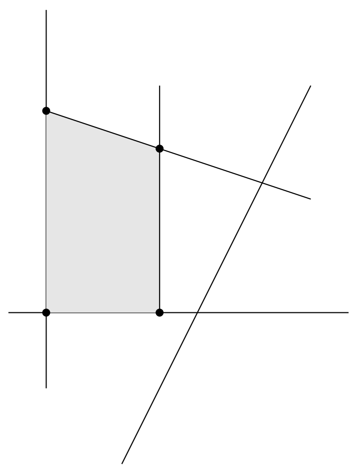
Ex. 2 — Passe o problema para a forma padrão e resolva-o usando o método gráfico.

$$\begin{aligned} &\max\ x_1 + 2x_2\\ &\text{s.a.}: 2x_1 - x_2 \leq 4\\ &\qquad x_1 + 3x_2 \leq 8\\ &\qquad x_1 \leq 3/2\\ &\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Comentário: Forma padrão:

$$\begin{aligned} &\max\ x_1 + 2x_2\\ &\text{s.a.}: 2x_1 - x_2 + x_3 = 4\\ &\qquad x_1 + 3x_2 + x_4 = 8\\ &\qquad x_1 + x_5 = 3/2\\ &\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Resolução gráfica:



Os pontos e seus valores são

$$\begin{array}{lll} (0,0) & \to 0 & = 0\\ (0,8/3) & \to 16/3 & = 5.333\\ (3/2,13/6) & \to 35/6 & = 5.833\\ (3/2,0) & \to 3/2 & = 1.5 \end{array}$$

Logo, o ponto ótimo é $(3/2, 13/6)$.

Ex. 3 — (transformações lineares preservam convexidade?) Seja $A + B$ o conjunto contendo as somas de todos os elementos de A e B; e kA o conjunto dos elementos de A multiplicados pelo escalar k. Para quaisquer conjuntos convexos A e B, é verdade que $kA + B$ é convexo? Prove que sim ou que não.
Comentário:
Provamos em duas partes:

- kA é convexo
- Soma de dois convexos é convexo.

Primeira parte:

Seja $x, y \in A$. Então $kx, ky \in kA$. Seja $a(kx) + b(ky)$ combinação convexa. Então

$$\begin{aligned} a(kx) + b(ky) &= k(ax) + k(by) \\ &= k\underbrace{(ax + by)}_{\in A} \end{aligned}$$

Logo $k(ax + by)$ pertence a kA, o que é o mesmo que dizer que $a(kx) + b(ky)$ – a combinação convexa – pertence a kA, e kA é convexo.
Segunda parte: veja notas de aula (teorema 3.26).