Programação Matemática – Teste II

Regras: (i) **não** é permitido fazer consultas a material escrito ou pessoas; (ii) **não** é permitido usar calculadora, telefone, ou qualquer dispositivo tecnológico que auxilie a realizar contas.

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Faça o item (1). Faça também um dentre (2) e (3), à sua escolha.

Ex. 1 — Explique brevemente e com rigor o que é uma solução degenerada para um problema de programação linear.
Comentário: uma solução é degenerada quando inclui uma variável básica com valor zero.

Ex. 2 — Considere o problema a seguir

$$\begin{aligned} \max x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a.}: x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 5 \\ 2x_1 + x_3 &\leq 9 \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

i) Construa o tableau Simplex para este problema, e execute a primeira iteração do algoritmo, até a construção do segundo tableau. Os dois tableaux devem ter os coeficientes reduzidos de custo.

ii) Observando o tableau que voce construiu, diga se o problema é ilimitado, degenerado, e diga também se o segundo tableau é ótimo.

Comentário:
i)
i.a) Se começarmos com a base (x_4, x_5, x_3), não temos que fazer quase nada:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ \hline -5 & -2 & 0 & 0 & 0 & -3 & \end{array}\right)$$

O tableau é ótimo, não há o que fazer.
i.b) Se começarmos com a base (x_4, x_5, x_6), o primeiro tableau é

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ \hline 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

i.b.1) Se incluírmos x_3, o tableau não muda, e chegamos no ótimo:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ \hline -5 & -2 & 0 & 0 & 0 & -3 & \end{array}\right)$$

i.b.2) Se incluírmos x_1, x_6 sairá:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & -1/2 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & -3 & -1/2 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 9/2 \\ \hline 0 & -4 & 7/2 & 0 & 0 & 1/2 & \end{array}\right)$$

Não é ótimo.
ii) Não pudemos em nenhum caso identificar que o problema é ilimitado ou degenerado.

Ex. 3 — Há algum problema da forma

$$\begin{aligned} &\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ &\text{s.a.}: A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

que tenha valor ótimo v, tal que o problema

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ &\text{s.a.}: A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

também tenha valor ótimo v?
Se não existe, explique rigorosamente o motivo.
Se existe, diga em detalhes como é a região viável deste problema. Em quantas dimensões pode ser descrita? Quantos pontos ótimos existem?
Comentário: De maneira resumida, queremos que $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ seja o mesmo que $\max -vec^\top \mathbf{x}$. Os dois vetores gradiente apontam para direções opostas. Em $\mathbb{R}^n$, os dois serão ortogonais a um hiperplano que define um semiespaço – e as soluções terão que pretencer a este hiperplano. Assim, o conjunto de soluções viáveis deve ser descrito com dimensão *no máximo* $n-1$.
Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$ podemos ter um ponto ou uma reta. Em $\mathbb{R}^3$, um ponto, uma reta ou uma face do politopo.