Teoria Aritmética de Números II – Lista I

Ex. 1 — Prove que se p e q são primos ímpares tais que existe um x inteiro positivo tal que $p = q + 4x$, então

$$\left(\frac{x}{p}\right) = \left(\frac{x}{q}\right).$$

Ex. 2 — Prove a seguinte extensão do Teorema de Wilson: se p é primo e $p \nmid a$, então

$$(p-1)! \equiv -\left(\frac{a}{p}\right) a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Ex. 3 — Prove que para n ímpar,

$$\left(\frac{-1}{c}\right) = (-1)^{(c-1)/2}$$

Ex. 4 — Prove que para todo n inteiro positivo,

$$n = \phi(n) \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}.$$

Ex. 5 — Sejam $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, com

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Prove que

$$f(n) = \sum_{\substack{d|n \\ n \text{ livre de quadrados}}} (-1)^{p(n/d)} g(d),$$

onde $p(n/s)$ é a quantidade de primos distintos na fatoração de n/d

Ex. 6 — Prove que a seguinte fórmula de inversão (similar à inversão de Moebius) vale.
Sejam duas funções f e g. Então,

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\lfloor x \rfloor} f\left(\frac{x}{j}\right)$$

se e somente se

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(j) g\left(\frac{x}{j}\right).$$

Ex. 7 — Seja n um inteiro positivo. O *radical* de um n é o produto dos primos *distintos* na fatoração (ou seja, é a fatoração de n, mas modificada para que todo primo tenha expoente um). Denotamos o radical de n por $\mathrm{rad}(n)$. Por exemplo, $600 = (2^3)(3)(5^2)$, então $\mathrm{rad}(600) = (2)(3)(5) = 30$. Prove que

$$\frac{\phi(n)}{n} = \frac{\phi(\mathrm{rad}(n))}{\mathrm{rad}(n)}.$$

Ex. 8 — Encontre n tal que $\phi(\sigma(2^n)) = 2^n$.

Ex. 9 — Encontre expressões fechadas para

a) $\sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d)$

b) $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$

c) $\sum_{d|n} \mu(d)\phi(d)$

d) $\sum_{d|n} \mu^2(d)\phi^2(d)$

e) $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{\phi(d)}$